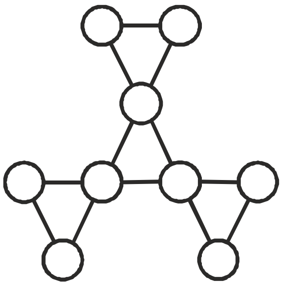
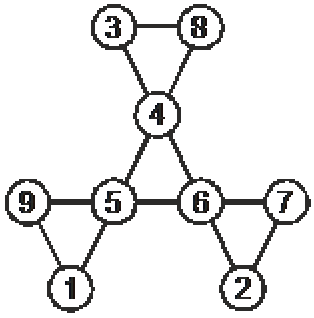
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан.

4 класс, заключительный этап. 13 февраля 2021 года

Решения задач

1. Расставьте девять различных цифр в кружки на рисунке так, чтобы сумма цифр в вершинах каждого треугольника была одинаковой.





Ответ: Один из многих примеров изображен на втором рисунке.

2. На столе в ряд выложены 10 карточек с изображениями фиксиков. Если на карточке сверху изображена Симка, то с обратной стороны нарисован Нолик. Если на карточке сверху изображен Нолик, то с обратной стороны — Папус. А если на карточке сверху нарисован Папус, то с обратной стороны — Симка. После того, как ДимДимыч перевернул по одному разу все карточки, на которых увидел Папуса или Нолика, карточек с Симкой наверху стало на две больше, чем вначале, а карточек с Папусом — на три больше. Сколько всего Ноликов ДимДимыч видел вначале?

Ответ: 5 Ноликов.

Решение: Обозначим виды карточек как «Симка–Нолик», «Нолик–Папус», «Папус–Симка». Изначально, Симку было видно на карточках вида «Симка–Нолик», а после переворачивания Симку стало видно на карточках вида «Симка–Нолик» и «Папус–Симка», значит карточек вида «Папус–Симка» всего 2. Папуса было видно на карточках вида «Папус–Симка», а после переворачивания — на карточках «Нолик–Папус». Значит карточек «Нолик–Папус» на 3 больше, чем карточек «Папус–Симка», т.е. 5 карточек. Тогда изначально было видно 5 Ноликов.

3. На олимпиаде участвовало 100 четвероклассников. После того, как все олимпиадные работы были собраны, оказалось, что:

1) Ровно у 30 участников вся работа были записана на одном листе, но работу на четырёх листах сдал только 1 человек!

2) Работа была записана на трёх листах у стольких же людей, у скольких работа записана на чётном числе листов.

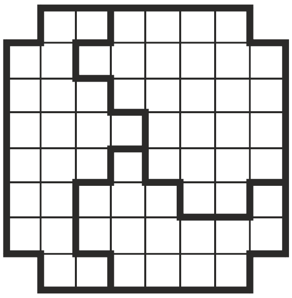
3) Никто не сдал больше четырёх листов, но каждый сдал хотя бы один лист.

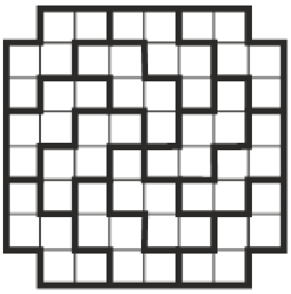
Определите, сколько всего листов получило жюри олимпиады?

Ответ: 207 листов.

Решение: Из 3-его условия следует, что каждый участник сдал от 1 до 4 листов. Из них 30 участников сдало по 1 листу, а остальных – 70. Из 2-го условия следует, что участников, сдавших 3 листа столько же, сколько участников с 2-мя или 4-мя листами, а значит половина от 70, т.е. 35. Четыре листа сдал 1 участник, тогда по два листа сдало 34 ученика. Итого имеем 1×30+2×34+3×35+4×1 = 207 листов.

4. В тетради карандашом нарисовали квадрат 8×8 без угловых клеток, разделённый на одинаковые клетчатые фигурки (они состоят более, чем из одной клетки). После того как некоторые линии стёрли, получилось изображение, как на рисунке. Восстановите стёртые линии. Фигурки считаются одинаковыми, если их можно совместить наложением.





Ответ: Пример разбиения изображен на втором рисунке**.**

5. Три девочки — Маша, Саша и Даша — заключили соглашение: каждый день ровно одна из них лжёт, но никто не лжёт два дня подряд. Сегодня произошёл диалог:

Маша — Саше: «Ты завтра будешь говорить правду».

Саша — Маше: «А ты завтра будешь лгать».

Даша — Саше: «Вчера ты говорила Маше то же самое!».

Кто из девочек лжёт сегодня? *Укажите все варианты и докажите, что других нет.*

Ответ: Даша.

Решение: Разберем все варианты, кто сегодня может лгать:

1) Если сегодня лжёт Маша, то Саша сегодня лгать не может, тогда из утверждения Саши получаем, что Маша будет лгать и завтра, но никто два дня подряд лгать не может.
2) Если сегодня лжёт Саша, то Маша и Даша сегодня говорят правду, но тогда из утверждения Даши следует, что вчера Саша тоже лгала, что невозможно.
3) Если сегодня лжёт Даша, то возможен вариант, когда Маша будет лгать завтра и лгала вчера.

6. Пароль от компьютера считается надёжным, если он удовлетворяет **хотя бы четырём** из следующих пяти условий:

1) Кроме цифр и букв, пароль не может содержать других символов;
2) Цифры и буквы должны чередоваться;
3) Цифр, меньших 4, быть не должно;
4) Сумма всех цифр равна 47;
5) Каждая буква, которая есть в пароле, встречается ровно три раза, а каждая цифра, которая есть в пароле, встречается ровно два раза.

Из какого наибольшего числа символов может состоять надежный пароль?

Ответ: 24 символа.

Решение: Заметим, что 4-ое и 5-ое условия одновременно выполняться не могут, поскольку если каждая цифра, участвовавшая в пароле, встречается ровно два раза, то сумма всех цифр окажется чётной, но 47 не делится на 2. Значит для надежного пароля либо выполняются условия 1, 2, 3, 4, либо условия 1, 2, 3, 5.

1) Пусть выполняются все условия, кроме 5-го. Тогда, поскольку по 3-ему условию, можно использовать только цифры, большие или равные 4, количество цифр не превышает 11, иначе сумма имеющихся больше или равна $4 \times 12 = 48$. По 2-му условию цифры и буквы должны чередоваться, значит количество букв не превышает 12. Тогда в этом случае символов не более 23.
2) Пусть выполняются все условия, кроме 4-го. Из 3-го условия имеем, что использовать можем только цифры от «4» до «9», причем максимум по 2 раза. Тогда цифр в пароле не более 12, тогда букв не более 13, но 13 не делится на 3, тогда в этом случае символов менее 25. Пример на 24: «А4А4А5Б5Б6Б6В7В7В8Г8Г9Г9».