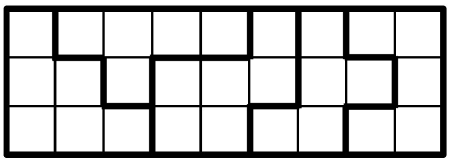
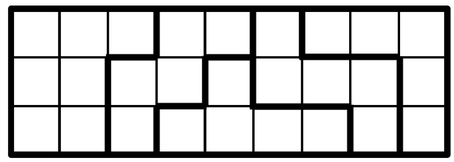
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 13 февраля 2021 года. Решения задач.

1. Разрежьте прямоугольник 3×9 по линиям сетки на пять различных клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы. *Достаточно привести один пример.*

Решение. Два примера разрезаний приведены на картинках. Все известные жюри примеры состоят из пяти фигурок периметром 12 — либо двух гексамино (шестиклеточных) и трех пентамино (пятиклеточных), либо одной гептамино (семиклеточной) и четырех пентамино.





Существует всего шесть фигурок гексамино и две фигурки гептамино периметра 12.

2. Двоечнику Васе нужно сложить две правильные дроби, одну — со знаменателем 7, а другую — со знаменателем 11. Вася сложил числители, и перемножил знаменатели. В результате он получил ответ, который был в 8 раз меньше правильного. Какие дроби могли быть у Васи? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

Ответ. $\dfrac{1}{7}+\dfrac{3}{11}$, $\dfrac{2}{7}+\dfrac{6}{11}$ и $\dfrac{3}{7}+\dfrac{9}{11}$ (т.е., $\dfrac{x}{7}+\dfrac{3x}{11}$, где $x=1,2,3$).

Решение. Пусть Васе нужно было сложить дроби $\dfrac{x}{7}$ и $\dfrac{y}{11}$. Он получил число $\dfrac{x+y}{77}$ вместо числа $\dfrac{11x+7y}{77}$. Отсюда следует уравнение

$$\frac{11x+7y}{77}=8\cdot\frac{x+y}{77},$$

или

$$11x+7y=8x+8y.$$

Приводя подобные слагаемые, получим $y=3x$.

Число x может быть от 1 до 6, но только при $x=1$, 2 или 3 число y будет не превосходить 11. Отсюда получаем ответ.

3. Два поезда курсируют по железной дороге между Манчестером и Ливерпулем. Каждый из них ездит с постоянной скоростью, причем скорость первого на 25% выше скорости второго. Приехав в какой-то из этих городов, каждый поезд стоит ровно 15 минут, а затем едет обратно. В 9:00 первый поезд вышел из Ливерпуля, а второй — из Манчестера. В 14:00 впервые они оба оказались одновременно в Манчестере. Сколько времени тратит первый поезд на то, чтобы проехать из одного города в другой?

Ответ. 48 минут.

Решение. Пусть второй поезд проезжает расстояние между городами за t минут. Так как скорость первого поезда в $\frac{5}{4}$ раз больше, то первый поезд проезжает это расстояние за $\frac{4}{5}t = 0{,}8t$.

Ясно, что пока первый поезд впервые приедет в Манчестер, второй еще не доедет до Ливерпуля, так что встретиться в эти 15 минут они не могут.

Второй поезд, проехав туда-обратно, будет в Манчестере в интервале от $2t+15$ до $2t+30$ минут. Первый поезд снова окажется в Манчестере, проехав между городами три раза, поэтому интервал его нахождения там от $2{,}4t+30$ до $2{,}4t+45$ минут. Поскольку $2{,}4t+30 > 2t+30$, к тому моменту, когда первый приедет в Манчестер, второй уже уедет оттуда.

Второй поезд снова окажется в Манчестере, проехав между городами четыре раза, то есть, в интервале от $4t+45$ до $4t+60$ минут. Первый же поезд вернется в Манчестер, проехав между городами пять раз, то есть, в интервале от $4t+60$ до $4t+75$ минут. Следовательно, они встретятся там через $4t+60$ минут от 9:00. Отсюда $4t = 240$ минут, поэтому $t = 60$ минут, а $0{,}8t = 48$ минут.

4. По кругу стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние этой лампочки и какой-то одной из двух соседних с ней. Изначально все лампочки выключены. Петя знает про каждый выключатель, какие именно две лампочки он переключает. Докажите, что при любом n он всегда сможет включить не менее $2/3$ лампочек.

Решение. 1. Среди любых трех подряд идущих выключенных лампочек Петя сможет включить какие-то две, нажав на центральный выключатель.

2. Если $n = 3k$, то Петя может разбить все лампочки на тройки, и включить ровно $2/3$ из них по пункту 1.

3. Пусть $n = 3k+2$. Петя может нажать любой выключатель, он включит две подряд идущих лампы. После этого остальные $3k$ лампочек можно разбить на тройки и включить $2k$ из них. Тогда всего Петя включит $2k+2 > \frac{2}{3}(3k+2)$ лампочек.

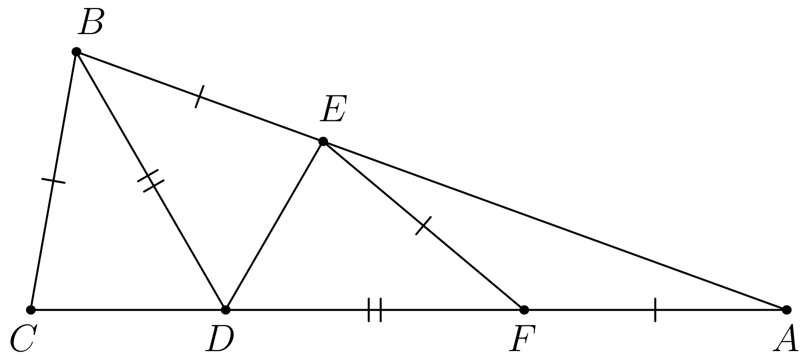
4. Пусть, наконец $n = 3k+1$. Сначала Петя включит какие-то две подряд лампочки, как в п.3. Назовем их A и B. Пусть сначала $n > 4$, а три следующие за ними дальше по кругу — это лампочки C, D, E. Если две лампочки X, Y стоят рядом и выключатель X включает Y, то будем записывать это так: $X \to Y$. Если $C \to D$, или $D \to C$, то Петя включает лампочки C и D и тем самым получает 4 подряд горящих лампочки. Остальные он опять разбивает на тройки и тем самым включит $4 + \frac{2}{3}(3k-3) = 2k+2 > \frac{2}{3}(3k+1)$ лампочек.

Если же оба этих условия не выполнены, то обязательно $C \to B$ и $D \to E$. Тогда Петя обратно выключит лампочки A и B и включит 4 подряд: B, C, D, E, а дальше будет действовать, как в первом случае.

Остался случай $n = 4$. Снова обозначим лампочки по кругу A, B, C и D и пусть Петя включил A и B. Если $C \to D$, или $D \to C$, то Петя включит все 4 лампочки. В противном случае обязательно $C \to B$ и $D \to A$. Тогда Петя выключит A, B и включит все 4 нажатиями на C и D.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$), в котором угол $\angle BAC = 20^\circ$, проведена биссектриса BD. Докажите, что $AD = BD + BC$.

Решение. Поскольку BD — биссектриса угла B, то $\angle CBD = \angle DBA = 40^\circ$. Тогда $\angle BDC = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$. Следовательно, $\angle BDA = 120^\circ$. Проведем биссектрису DE этого угла, она поделит его на два угла по 60°. Треугольники BCD и BDE равны по двум углам и общей стороне BD. Отсюда $BC = BE$.



Проведем из точки E прямую EF так, что $\angle AEF = 20^\circ$, а точка F лежала бы на AD. Тогда в треугольнике AEF два угла равны, поэтому он — равнобедренный, т.е., $AF = FE$. Кроме того, $\angle DEF = 180^\circ - \angle DEB - \angle FEA = 80^\circ$, откуда треугольники BED и DEF равны по двум углам и общей стороне DE. Отсюда получаем, что $DF = BD$ и $FE = BE$.

Окончательно имеем $AD = AF + FD = FE + BD = BE + BD = BC + BD$.

6. Можно ли расставить числа 0, 0, 1, 1, 2, 2, ..., 97, 97, 98, 98 (каждое число встречается ровно по два раза) по кругу в каком-то порядке так, чтобы между каждыми двумя числами, равными k, стояло ровно k других чисел? (В частности, между двумя нулями не было других чисел, между двумя единицами стояло ровно одно число, между двумя двойками — ровно два числа и т.д.)

Решение. Всего у нас есть $99 \cdot 2 = 198$ мест, на которых могут стоять числа. Раскрасим эти места в черный и белый цвета так, чтобы цвета чередовались (соседние места были разноцветные). Тогда всего имеется по 99 белых и черных мест. Предположим, что расставить числа требуемым образом удалось.

Назовем число от 0 до 98 *одноцветным*, если оба экземпляра этого числа стоят на местах одного цвета. Одноцветное число назовем *белым*, если оно стоит на белых местах, и *черным*, если на черных. Назовем число *многоцветным*, если оба экземпляра этого числа стоят на местах разного цвета. Ясно, что каждое нечетное число является одноцветным, а каждое четное — многоцветным.

Предположим, что всего имеется N черных чисел (все они нечетны). Всего в нашем круге имеется 50 пар четных чисел и 49 пар нечетных. Подсчитаем количество черных мест. Каждое четное число занимает одно черное место, а N черных чисел занимают $2N$ черных мест. Тогда всего черных мест должно быть $50 + 2N$ — четное число, а их в круге 99. Противоречие.