Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 13 февраля 2021 года. Решения задач.

1. Как уравновесить гирю в 121 г на чашечных весах, используя несколько гирь из набора 90 г, 91 г, 92 г, ..., 100 г? Каждую гирю можно использовать не более одного раза. *Достаточно привести один пример.*

Решение. Заметим, что $121 = 100 + 9 + 7 + 5 = 100 + (99 - 90) + (98 - 91) + (97 - 92)$. Тогда один из вариантов уравновесить будет $121 + 90 + 91 + 92 = 100 + 99 + 98 + 97$.

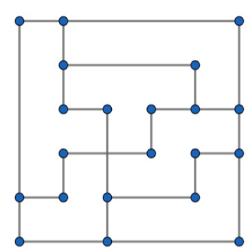
2. Ренат и Рифат родились 13 февраля. В свой день рождения каждый из них получает торт со свечками, количество которых равно количеству исполнившихся ему лет. В год их знакомства у Рената на торте было столько же свечек, сколько у Рифата сегодня. Оказалось, что общее количество свечек на четырёх тортах Рената и Рифата (в этот и в тот год) равно 168. Сколько лет исполнилось Рифату сегодня?

Ответ. 42 года.

Решение. Пусть сегодня на торте у Рифата x свечек. В год знакомства, на t лет раньше, на торте у Рената было также x свечек, а на торте Рифата было $x - t$ свечек. Следовательно, сегодня на торте у Рената $x + t$ свечек. Тогда суммарное количество свечек равно $x + x + (x - t) + (x + t) = 4x$. Таким образом, $4x = 168$, то есть $x = 42$. Значит, сегодня Рифату исполнилось 42 года.

3. На какое наибольшее количество различных клетчатых фигур можно разрезать по линиям сетки квадрат 5×5 так, чтобы никакая из полученных фигур не являлась прямоугольником? Фигуры считаются различными, если их невозможно совместить наложением.

Ответ. 6 фигур.



Решение. *Пример* на 6 фигур можно увидеть на рисунке.

Оценка. Пусть есть хотя бы 7 клетчатых фигур не являющихся прямоугольниками. Тогда среди них будет хотя бы две трехклеточные, так как $6 \cdot 4 + 3 > 25$. Но есть только одна трехклеточная фигурка, не являющееся прямоугольником. Противоречие.

4. Вася дошел из дома до школы за 30 минут. Одновременно с ним из дома в том же направлении выбежала собака, которую Вася держит на поводке длиной 5 метров. Каждый раз, когда собака удаляется от Васи на длину поводка, она меняет направление своего движения на противоположное. Так продолжалось до тех пор, пока они одновременно не добрались до школы. Найдите время, в течение которого собака бежала по направлению к Васе. Скорости Васи и собаки постоянны.

Ответ. 15 минут.

Решение. Рассмотрим промежуток времени между двумя разворотами собаки. Относительная скорость собаки (скорость удаления собаки от Васи или скорость сближения собаки с Васей) на этом промежутке будет постоянна, поэтому встреча с Васей произойдет ровно посередине этого временно́го промежутка. Тогда ровно половину этого промежутка собака бежала по направлению к Васе. Из тех же соображений равны промежутки времени от выхода из дома до первого разворота и от последнего разворота до прихода в школу. Поэтому собака смотрела в второну Васи ровно половину времени, т.е., 15 минут.

5. На доске в ряд написаны 50 знаменателей: четные числа от 2 до 100. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) приписывают к какому-нибудь из них сверху по одному числителю. Можно приписать или 1, или половину следующего знаменателя (например, к знаменателю 26 можно приписать числителем или 1, или $14 = 28/2$, а к знаменателю 100 можно приписать числителем или 1, или 51). После 50 ходов, когда все числители написаны, подсчитывается сумма всех получившихся дробей. Может ли Вася до начала игры загадать какое-то число (необязательно целое) и гарантированно получить сумму, равную загаданному числу?

Ответ. Да, может.

Решение. Покажем, что Вася может получить число

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100} + \frac{25}{2}.$$

Для этого разобьем знаменатели на 25 пар подряд идущих. Если Петя приписывает числитель к одному из знаменателей, то Вася будет приписывать числитель ко второму знаменателю в этой паре. При этом Вася может добиться того, чтобы ровно у одной из дробей числитель был равен 1 (если Петя приписал 1, то Вася приписывает половину следующего, и наоборот). Тогда сумма дробей для пары знаменателей $(2x, 2x + 2)$ будет равна

$$\frac{1}{2x} + \frac{x+2}{2x+2} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2x} + \frac{1}{2x+2}.$$

Поэтому сумма всех дробей, получившихся у ребят, будет равна сумме всех дробей вида $1/2k$ + половина от количества пар, т.е., $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100} + \frac{25}{2}$.

6. В клетки доски 10×10 расставлены пятьдесят нулей и пятьдесят единиц так, что в каждой клетке стоит ровно одно число. Отметили те стороны клеток, которые разделяют клетки с одинаковыми числами (и только их). Оказалось, что отмеченные стороны образуют замкнутую несамопересекающуюся ломаную. Докажите, что площадь, которую она ограничивает, — четная.

Решение. Полученная ломаная разбивает доску на две области. В каждой из этих областей числа стоят в шахматном порядке. Действительно, рядом с единицей могут стоять только нули, и наоборот, рядом с нулями — только единицы, иначе появятся еще отрезки, не принадлежащие ломаной.

Заметим, что в двух клетках, разделенных отрезком, принадлежащим ломаной, стоят одинаковые цифры. Это означает, что если инвертировать числа во внутренней области (заменить все нули на единицы и наоборот), то тогда вообще все числа на доске будут стоять в шахматном порядке. Действительно, вдоль границы ломаной числа будут в шахматном порядке, и во всей внутренней области тоже. Осталось заметить, что до инвертирования количество нулей и единиц на доске было одинаковым по условию, и после инвертирования тоже осталось одинаковым, потому что доска состоит из четного количества клеток. Это означает, что количество нулей и единиц, подвергшихся инвертированию, тоже было одинаковым. Следовательно, фигура внутри ломаной имеет четную площадь.